NOTAS SOBRE LA TEORÍA DE GRUPOS

LIBRARY
UNIVERSITY OF ILLINOIS
URBANA

POR

G. A. MILLER

TRABAJO PUBLICADO EN LA
REVISTA MATEMÁTICA
HISPANO - AMERICANA

MADRID
1919

Establecimiento tipográfico de Fortanet, Libertad, 29.

512.861
M61N
cop.2
REMOTE STORAGE
LIBRARY
UNIVERSITY OF ILLINOIS,
URBANA.

NOTAS SOBRE LA TEORÍA DE GRUPOS

La siguiente colección de notas sobre la teoría de grupos ha sido hecha reuniendo las opiniones que interesaron más fuertemente al que esto escribe, y, ordenándolas cronológicamente; nuestro objeto ha sido el agrupar nombres de eminentes autoridades matemáticas en diversas ramas, consiguiendo con una lista suficientemente extensa, que el lector pueda formarse una idea clara del estado de esta teoría.

No pretendemos que esta lista sea completa, sino más bien representativa.

Al dar a la publicidad esta colección en esta REVISTA (*), donde puede ser provechosa, el autor espera sirva de utilidad para aquellos que no han penetrado profundamente en este campo, pero desean obtener una noción general relativa a esta disciplina; además, las referencias serán provechosas para aquellos que deseen obtener una visión más extensa de cómo se han ocupado del tema escritores eminentes. La colección podría tener valor desde el punto de vista histórico, mostrando en una ojeada la rapidez con que el concepto de grupo llega a un lugar tan preeminente en el desarrollo de la Matemática.

H. POINCARÉ: *Notice sur les travaux scientifiques,* p. 7, 1884:

«Hay una teoría que me ha sido igualmente útil en todas mis investigaciones, a saber: la de los grupos formados por sustituciones lineales. En efecto: estas sustituciones desempeñan un papel preponderante en el estudio de las ecuaciones lineales y en el de las formas aritméticas. A ella deben atribuirse las relaciones frecuentemente inesperadas, que haré notar más tarde, entre la teoría de números y las funciones fuchsianas, teorías que no parecen a primera vista tener ningún punto de contacto.»

F. KLEIN: *Einleitung in die höhere Geometrie,* II, p. 3, 1893:

«El concepto de grupo fué empleado en la centuria anterior (hacia 1870), al mismo tiempo, por Lagrange y Vandermonde, y desde esta época ocupa un lugar preeminente en la teoría de las ecuaciones algébricas. En apoyo de esto basta citar a Galois. Desde entonces, la teoría de grupos ha sido considerada como un suplemento al Álgebra. Esto es, sin embargo, incorrecto, pues

(*) Esta primera parte del trabajo del Sr. Miller ha sido ya publicada en el *Tohoku Journal.* La segunda parte ha sido escrita por su autor expresamente para esta REVISTA.

el concepto de grupo se extiende mucho más allá, llegando a casi todas las regiones de la Matemática.»

S. Newcomb: *Bulletin of the American Methematical Society*, vol. III, p. 107, 1893:

«La Matemática del siglo XXI puede ser muy diferente de la nuestra; quizá el escolar empezara el Álgebra por la teoría de los grupos de sustituciones, como podría hacerse también ahora, si no fuera por las costumbres heredadas.»

G. Frobenius: *Berliner Sitzungsberichte*, p. 627, 1893:

«El concepto de grupo, que fué introducido en la Matemática por Gauss y Galois, ha adquirido en los tiempos recientes una importancia fundamental en todas las ramas de nuestra Ciencia. Gran parte de la teoría de números es solamente teoría de los grupos abelianos.»

S. Lie: *Centenaire de l'Ecole Normale*, p. 485, 1895:

«Los conceptos de grupo e invariante adquieren cada día un lugar más preponderante en la Matemática y tienden a dominar por entero esta Ciencia.»

E. Picard: *Traité d'Analyse*, vol. III, p. 492, 1896:

«Aunque no podemos dar aquí una exposición completa de los resultados de Sophus Lie sobre la teoría de los grupos continuos de transformaciones, es, sin embargo, indispensable que hagamos algunas observaciones generales sobre la noción de grupos continuos, que desempeñan un papel tan importante en la Ciencia de nuestra época.»

E. Picard: *Oeuvres Mathématiques de Galois*, Introducción, 1897:

«Galois demostró que a cada ecuación algébrica corresponde un grupo de sustituciones en el cual se reflejan las características esenciales de la ecuación.

En Álgebra la teoría de grupos ha sido estudiada hace tiempo, especialmente por Cauchy, que introdujo ciertos elementos de clasificación.

Las investigaciones de Galois en la teoría de ecuaciones demuestran la importancia de la noción de subgrupo invariante de un grupo dado y le conducen a dividir los grupos en simples y compuestos, distinción fundamental que se extiende realmente más allá del dominio del Álgebra, al concepto de grupos de operaciones en la acepción más extensa posible de esta palabra.»

Bertrand Russell: *Foundations of geometry*, p. 47, 1857:

«El objeto total de la Geometría puede considerarse como una teoría de grupos continuos que define todas las colineaciones y movimientos posibles.»

Fricke und Klein: *Automorphe Funktionen*, vol. I, p. 1, 1897:

«La teoría de grupos, cuyo influjo se nota en casi todas las ramas de la Matemática superior, ocupa el primer lugar entre las teorías auxiliares empleadas en la teoría moderna de funciones.»

H. Weber: *Lehrbuch der Algebra*, vol. I, Prefacio, 1898:

«Hay dos cosas que han tenido considerable importancia para los modernos progresos del Álgebra: por un lado, la teoría de grupos, cada vez más domi-

nante, cuya influencia sistematizadora y aclaratoria se siente en todas partes; por otra parte, la profunda compenetración con la teoría de números.»

PUND: *Algebra mit Einschluss der elementaren Zahlentheorie:*

«El más importante de estos puntos de vista está suministrado por la teoría de grupos, que es realmente una ciencia de nuestro siglo y ha mostrado su influencia preponderante en casi todas las partes de la Matemática, no solamente en las recientes teorías, sino también en los fundamentos mismos, y por esto no puede omitirse esta teoría por más tiempo en los libros de texto.»

G. DARBOUX: *Comptes Rendus,* vol. CXXVIII, p. 523, 1899:

«Debería reprocharme a mí mismo el olvido, aun en un tan rápido resumen, de las aplicaciones que ha hecho Lie, de su teoría de grupos, a la Geometría no euclídea y del profundo estudio de los axiomas sobre los que reposan las bases de nuestros conocimientos geométricos.»

L. BIANCHI: *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni:*

«Deseo ofrecer a los jóvenes estudiantes de las Universidades italianas un libro que les sirva de introducción al estudio de una de las más importantes teorías (la de los grupos) de la Matemática moderna.»

H. MASCHKE: *American Mathematical Monthly,* vol. IX, p 214, 1902:

«Puede decirse de las partes más importantes de la Geometría moderna que existe un concepto que impera en todas partes: es el concepto de grupo.»

P. A. MAC MAHON: *Nature,* vol. LXV, p. 488, 1902:

«Una sección de la Matemática que se reconoce universalmente como de importancia fundamental es la teoría de los grupos.»

J. RICHARD: *Sur la philosophie des mathématiques,* p. 229, 1903:

«La noción de transformación y de grupo adquiere en la Ciencia matemática, tanto en Análisis como en Geometría, un lugar cada vez más preeminente.»

J. PIERPONT: *Bulletin of the American Mathematical Society,* vol. XI, página 144, 1904:

«En resumen: podemos decir que el concepto de grupo, apenas perceptible al comenzar el siglo, a su terminación ha llegado a ser una de las nociones más fundamentales y fructíferas de todas las que existen en nuestra ciencia.»

H. COUTURAT: *Les principes des Mathématiques,* p. 329, 1905:

«Es conocido el importante lugar que la teoría de grupos ha alcanzado en la Matemática moderna; principalmente a través de la obra de Lie, sus aplicaciones se extienden a la Aritmética superior, al Álgebra, a la Geometría, al Análisis y a la Mecánica.»

G. FANO: *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,* vol. III, p. 293, 1908:

«El significado amplio del concepto de grupo, mucho más amplio que en sus primeras aplicaciones, apareció primero en las obras de C. Jordan. Partiendo de ellas, las obras de Klein y S. Lie hacen de este concepto un objeto de investigación y lo traen hasta el centro mismo de la investigación.»

M. Bôcher: *Introduction to higher Algebra,* p. 80, 1907:

«Conjuntos, sistemas y grupos, estas tres palabras son los nombres técnicos de conceptos con los cuales siempre se tropieza en todas las ramas de la Matemática.»

H. Fehr: *L'Enseignement des Sciences mathématiques,* vol. IX, página 192, 1907:

«Es bien conocido el papel fundamental que la noción de grupo desempeña en Matemática; constituye un principio guía, cuyo uso nunca se aconsejará bastante y que debe inspirar más cada vez a los profesores, pero no poseemos aún una exposición que se limite a las más elementales aplicaciones.»

H. Poincaré: *Bulletin des sciences mathématiques,* XXXII, p. 175, 1908:

«Entre las palabras que han ejercido la más deseable influencia se encuentran las de *grupo* e *invariante.* Ellas nos han facilitado el ver la esencia real de muchas ideas matemáticas y nos han mostrado cómo los antiguos matemáticos empleaban en muchos casos grupos sin conocerlos y cómo las encontraban de repente juntas sin saber por qué, cuando las habían considerado separadamente.»

E. Borel: *Die Elemente der Mathematik,* vol. II, Prefacio, 1909:

«Los nuevos fundamentos (de la Geometría elemental) han sido establecidos en el siglo XIX en las obras de los grandes matemáticos. Consisten en reconocer que la Geometría elemental es equivalente a la investigación del grupo de movimientos. Tal punto de vista está de acuerdo con la natural tendencia moderna de los sabios, de reemplazar las investigaciones estáticas de los fenómenos por la concepción dinámica o, en términos más generales, la idea de *evolución* penetra más y más en nuestros conocimientos.»

F. Müller: *Führer durch die mathematische Literatur,* p. 64, 1905:

«Galois estudió la aplicación de los grupos discontinuos al Algebra. En fecha posterior este concepto fué empleado en la teoría de números por Dedekind y otros, y en la teoría de funciones por Klein, Poincaré, Picard; la teoría de la resolución de las ecuaciones algébricas está basada principalmente en la consideración de ciertos grupos de sustituciones o permutaciones de las raíces.»

E. Lampe: *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik,* vol. XXXIX, p. 7, 1910:

«Por el contrario, la ya anticuada división de la teoría de funciones, de acuerdo con los puntos de vista de Cauchy, Riemann y Weierstrass, ha sido conservada (en el *Index du Repertoire biblographique des sciences mathématiques,* nueva edición), en espera de un posible desarrollo de un método de división basado en la teoría de grupos.»

E. G. Wilczynski: *The New Haven Mathematical Colloquium,* p. 151, 1910:

«El concepto de grupo, que ha llegado a ser tan fundamental en toda la Matemática, suministra las bases más convincentes para una clasificación de las distintas clases de Geometrías que han surgido.»

P. Epstein: *Pascal's Repertorium,* vol. I, p. 10, Prefacio, 1910:

«Los capítulos sobre teoría de grupos algébricos han recibido un mayor desenvolvimiento. Contienen referencias más amplias, que tendrán muy buena acogida entre los que quieran orientarse en un campo de actividad matemática tan intensa.»

J. W. Young: *Fundamental Concepte of Algebra and Geometry:*

«Si se nos pregunta cuál es el concepto más importante que existe en la base de la Matemática, con importancia análoga a las nociones de clases y correspondencias, mencionaríamos la noción de grupo. El conjunto de todos los movimientos de un cuerpo rígido en el espacio forma un grupo. Este grupo es de una importancia fundamental en la Geometría elemental.»

J. L. Coolidge: *Review of Proyective Geometry by Veblen and Joung,* Bull. American Math. Soc., vol. XVIII, p. 76, 1911:

«Otro rasgo recomendable de este capítulo es que, después de una breve discusión del concepto abstracto de grupo, los autores estudian con alguna atención el grupo de proyectividades de una dimensión. No deja de ser curioso que los autores anteriores de libros de texto sobre la Geometría proyectiva hayan desdeñado tranquilamente este importante tema.»

W. W. R. Ball: *Mathematical Gazette,* vol. VI, p. 322, 1912:

«El cambio de métodos en los reglamentos del *Tripos* (en Cambridge, Inglaterra) ha sido acompañado por curiosas alteraciones en los temas populares, y muy pocos de los jóvenes graduados que deseaban el cambio se interesan en aquellos temas de las matemáticas aplicadas, antes tan generalmente estudiados, sino más bien dedican su atención a temas abstractos, como las teorías de funciones y grupos.»

J. A. de Seguier: *Groupes de substitutions,* Prefacio, 1912:

«La teoría de grupos ha servido para encontrar las de los números racionales, campos de Galois y campos algébricos. Además, todas las proposiciones, exceptuando las relativas a la no contradicción de los primeros postulados, han sido reducidas de la noción de grupos abstractos.»

H. Weber: *Lehrbuch der Algebra* (Kleine Ausgabe), p. 180, 1912:

«Hay, principalmente, dos conceptos ampliamente generales que dominan en el Álgebra moderna; la existencia e importancia de estos conceptos pudo ser observada solamente después que el Álgebra se completó en una cierta extensión y empezaron a ser del dominio de los matemáticos; solamente entonces pudieron ser observados los principios de enlace y de guía. Estos son los conceptos de *grupo* y *dominio* (Körper). El más general es el de grupo.»

J. Hadamard: *Revue de Méthaphysique et de Morale,* p. 633, 1913:

«Por otra parte, casi al mismo tiempo que Poincaré daba a conocer dos nuevas teorías, empezaban a modificar el progreso de la Ciencia la teoría de los grupos continuos de S. Lie y la de los conjuntos de Cantor.»

LIBRARY
UNIVERSITY OF ILLINOIS,
URBANA.

LA TEORÍA DE LOS GRUPOS EN LA ENCICLOPEDIA MATEMÁTICA

Con objeto de difundir más esta teoría, hemos publicado en el número anterior una breve colección de citas, que contienen las opiniones de eminentes matemáticos, sobre la importancia y alcance de la teoría de grupos.

En el presente artículo, complemento del anterior, queremos llamar la atención de nuevo sobre la utilidad de las grandes enciclopedias, alemana y francesa, cuya publicación ha sido considerablemente retrasada por la gran guerra, desarrollada en el centro matemático del mundo.

En los fascículos de la edición francesa de enero de 1913, el término grupo aparece en sólo cuatro de las noventa y nueve artículos (publicados o anunciados) de Matemática pura.

Dos de esos artículos pertenecen al tomo I (Algebra) y llevan los siguientes títulos: *Sur les groupes finis discontinus* y *Groupes finis de substitutions.* Una parte del artículo perteneciente al tomo II (Análisis) apareció en 1916 bajo el título *Groupes de transformations continues*, mientras que el artículo perteneciente al tomo III (Geometría) se titula *La théorie des groupes continus et la Géométrie.* Los títulos de esos artículos muestran que la teoría de los grupos se aplica a cada una de los tres grandes divisiones de la Matemática pura: Algebra, Análisis, Geometría.

La publicación de la edición alemana ha rebasado los artículos de teoría de grupos a que nos referimos, mientras que la edición francesa no ha terminado aún ninguno de los suyos. Es, sin embargo, interesante el que la parte publicada del primero de esos artículos en la edición francesa tiene una extensión cuatro veces mayor que el artículo completo de la edición alemana sobre el mismo asunto, y que la parte del artículo que aparece en el tomo II de la edición francesa es dos veces mayor que el correspondiente artículo completo de la edición alemana.

Los artículos dedicados explícitamente a la teoría de grupos fracasan, sin embargo, al dar una noción correcta en lo que se relaciona con el lugar ocupado por este concepto en la Enciclopedia. Efectivamente, es muy difícil el determinar la relativa importancia de los distintos conceptos matemáticos fundamentales. Mucho se ha dicho respecto al íntimo contacto que con la

teoría de grupos tiene el resto de la Matemática. Así, por ejemplo (*), dice Shaw: «Es una rama de la Matemática que, contando apenas un siglo de existencia, ha adquirido considerable desarrollo entre las teorías de esta ciencia. Es además una rama que se debe conocer para poder estudiar cualquier parte de la Matemática, desde la Aritmética hasta las aplicaciones físicas. Efectivamente, es la noción de grupo la que ha alterado las teorías de la Física y ha hecho imposible conservar todas las antiguas nociones».

Estas citas pueden desorientar quizá a los jóvenes matemáticos, ya que hay muchas cuestiones importantes y extensas en Matemática, en que la noción de grupo no aparece explícitamente. En efecto, en los artículos con que comienzan los tres tomos de la gran Enciclopedia, sólo se trata la teoría de grupos explícitamente, en el último de los tres. Estos artículos se titulan: *Principes fondamentaux de l'Arithmétique*, *Principes fondamentaux de la théorie des fonctions* y *Principes de la Géométrie*.

Debe reconocerse, sin embargo, que el concepto de grupo se usa con frecuencia en la literatura Matemática, sin llamarlo así. En efecto, la totalidad de los números enteros constituye un grupo respecto a la adición y el conjunto de los números racionales, a excepción del cero, forman un grupo respecto de la multiplicación De aquí que podamos decir que los principios fundamentales de la Aritmética envuelven el concepto de grupo con tanta extensión como los de la Geometría; pero este hecho no se expone claramente en las enciclopedias.

En términos generales puede decirse que, en una tercera parte de los artículos de Matemática pura publicados en las grandes enciclopedias, el término *grupo* se usa explícitamente en varias cuestiones importantes. En muchos otros artículos se hacen referencias al concepto en cuestión, que no son un obstáculo serio para el lector no familiarizado con él.

Por ejemplo, en la primera lección del artículo titulado *Calcul des probabilités* se hace notar en la página 4 que la formación de los casos igualmente posibles es equivalente a la construcción de un grupo de sustituciones de ciertos elementos que puede llamarse *grupo invariante de la probabilidad*. No se vuelve a mencionar la teoría de grupos en el resto del artículo, y el lector que la desconozca puede seguir todos los desarrollos del mismo sin experimentar ninguna dificultad por falta de aquel conocimiento.

Entre los desarrollos algebraicos en los que la teoría de grupos se usa con gran extensión, están los relativos a los dominios de racionalidad, formas invariantes, multiplicación compleja y funciones racionales de las raíces de una ecuación. Nueve de los veintisiete artículos del tomo I están dedicados, bien a estos asuntos, ya a los grupos directamente. Los relativos al Análisis, tomo II, en que la teoría de grupos está tratada con alguna mayor extensión, son los siguientes: Métodos de integración de ecuaciones diferenciales;

(*) I. B. Shaw. *Philosophy of Mathematics*, 1918, pág. 93.

Ecuaciones diferenciales lineales; Ecuaciones funcionales; Funciones automorfas, y Funciones elípticas.

A juzgar por los artículos que han aparecido en la Enciclopedia, el uso más frecuente del concepto de grupo se hace en el tomo de Geometría, y el menos frecuente en el de Análisis; el de Álgebra parece un término medio entre las otras dos. Quizá sea de especial interés el notar el uso que de la teoría de grupos se hace en el artículo de Geometría elemental, desde el punto de vista del Análisis moderno, donde se establece que la *Geometría elemental es la teoría de los invariantes del grupo principal,* de acuerdo con Klein.

Es interesante dar a conocer algunas teorías de Matemática pura en los que, tal como las presentan las enciclopedias, la teoría de grupos ha entrado muy poco, o absolutamente nada. Entre ellas encontramos la de los números irracionales y límites, Series infinitas, Teoría de Conjuntos, Cálculos numéricos, Estadística, Cálculos diferencial e integral, Análisis algebraico y Métodos enumerativos de la Geometría. Los grupos continuos se usan más extensamente que los discontinuos, pero en varios casos en que ambos se presentan en una misma cuestión, los últimos suelen utilizarse más que los primeros.

Los desarrollos de Matemática aplicada en estas enciclopedias envuelven el concepto de grupo en forma explícita menos frecuentemente que los de Matemática pura, pero no debe creerse que el uso explícito de la teoría de grupos queda confinado a estos últimos desarrollos. Por el contrario, en el artículo inicial de Matemática aplicada titulado *Principes de la Mécanique rationelle*, encontramos en la página 24 que la medida de magnitudes se efectúa por un conjunto de operaciones que forman un grupo. Los grupos de sustituciones se mencionan también en el primer artículo del volumen segundo de Matemática aplicada, página 25, y los grupos de trasformaciones aparecen en la primera página del volumen sobre sistemas deformables, así como en el de Física Matemática están relacionados con la estructura de los cristales.

El término *grupo* se usa en estas enciclopedias con tres significados diferentes. Uno de ellos relativo a su uso en sentido no matemático, es decir, como colección. Otro se refiere a su empleo en el sentido matemático más general, y está definido en el tomo I, volumen II, página 243, así: Un conjunto de objetos lo llamaremos aquí *grupo*, siempre que podamos dar una regla tal que mediante ella podamos deducir de dos objetos cualesquiera del conjunto; un tercero que también pertenece al mismo conjunto. La tercera acepción de la palabra grupo es la más empleada, y es la adoptada con muy ligeras variaciones en los trabajos especiales sobre este asunto. Está formulada en la página 576 del tomo I, volumen I, y es mucho más restringida que ninguna de las dos anteriormente citadas. En efecto, cada uno de los dos últimos significados está incluído en el que los precede en su numeración.

Es claro que esta enorme diferencia de significado de la palabra grupo es origen de dificultades para el lector. Puede decirse, en general, que la cantidad de conocimientos especiales exigidos al lector varía en razón inversa de

3 0112 061407109

las restricciones impuestas a la palabra grupo, y alcanzan su máximo cuando se consideran grupos discontinuos de órdenes relativamente pequeños.

Cuando un autor habla de un «grupo intransitivo de sustituciones de orden cuarto y grado sexto, formado cambiando entre sí dos a dos las direcciones de ejes coordenados rectangulares», espera, naturalmente, del lector que conozca todos los elementos de este grupo. Cuando habla del «grupo siemple de orden sesenta», puede suponerse también que este grupo está conocido por sus elementos. En cambio, cuando habla de un grupo infinito (discontinuo o continuo), no puede suponer el conocimiento comprensivo del grupo que se considera.

De aquí que sea posible leer muchos de los artículos de la Enciclopedia en que hay referencias ocasionales a la teoría de grupos, sin estar familiarizado con los detalles referentes a las propiedades del grupo. Por otra parte, no se puede leer provechosamente artículos como los relativos a funciones racionales de raíces y teoría de Galois o transformaciones de contacto sin estar completamente familiarizado con las propiedades de los grupos que intervienen en estos desarrollos. El hecho de que los grupos se mencionan en más de la mitad de los artículos de Matemática pura que han aparecido en la Enciclopedia francesa, evidencia la gran utilidad de los grupos y la influencia que este concepto, relativamente moderno, ha adquirido en los últimos tiempos.

En todo lo anterior nos referimos casi exclusivamente a la edición francesa, por ser ésta en su totalidad más completa y reciente que la edición alemana. En ambas se dice que los campos de racionalidad son tipos de grupos (*), pero en la edición francesa aparece esto después de haber definido el término grupo por segunda vez y de haberle dado una significación mucho más amplia que la primera, mientras que en la edición alemana esto no se hace. En esta última se da una definición (pág. 218) que no está satisfecha por todos los elementos de un campo de racionalidad, y que además no es una definición completa de un grupo infinito, como ha hecho notar A. Loewy (**).

De lo precedente deducimos que el estudiante que desee saber con rigor qué es un grupo matemático, encuentra gran confusión en las grandes enciclopedias Matemáticas, si busca en ellas una respuesta. Por otra parte, estas enciclopedias suministran muchas noticias sobre el empleo de este término por autores eminentes, y, lo que es más importante, muestran las extensas aplicaciones de los conceptos abarcados bajo este nombre y los extensos desarrollos basados sobre el significado restringido, usual en Matemática. Un considerable número de adiciones a los artículos de la edición francesa pueden encontrarse en varios números de la sección *Tribune publique,* insertada en los fascículos publicados en dicha edición.

(*) Tomo I, vol. II, pág. 244 de la edición francesa; y Band. I, pág, 286, de la alemana.
(**) *Archiv der Mathematik und Physik,* vol. IX (1905), pág. 105.